

解析力学Ⅰ 演習問題 1

問題 1 偏微分と全微分

関数が

$$g(q, \dot{q}, t) = a\dot{q}^2 + b \sin(q - \omega t) + c \cos q \quad (1)$$

と与えられている。

(1) 各変数での偏微分を考える。ある変数で微分する場合は、それ以外の変数を定数とみなして微分をすればよいので、

$$\frac{\partial g}{\partial q} = b \cos(q - \omega t) - c \sin q \quad (2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{q}} = 2a\dot{q} \quad (3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\omega b \cos(q - \omega t) \quad (4)$$

(2) 時間による偏微分は、

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \frac{dg}{dt} \\ &= \frac{\partial g}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial g}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

となるので、(2)、(3)、(4) 式を用いて、

$$\dot{g} = 2a\dot{q}\ddot{q} + (b \cos(q - \omega t) - c \sin q) \dot{q} - \omega b \cos(q - \omega t) \quad (6)$$

問題 2 保存力とポテンシャル

(1) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ より、

$$(k_{32} - k_{23}) \mathbf{e}_x + (k_{13} - k_{31}) \mathbf{e}_y + (k_{21} - k_{12}) \mathbf{e}_z = 0 \quad (7)$$

よって、

$$k_{ij} = k_{ji} \quad (8)$$

また、ポテンシャルは、 $dV = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$

$$\begin{aligned} dV &= -(k_{11}x + k_{12}y + k_{13}z) dx - (k_{21}x + k_{22}y + k_{23}z) dy - (k_{31}x + k_{32}y + k_{33}z) dz \\ &= -d \left(\frac{1}{2} k_{11}x^2 + k_{12}xy + k_{13}xz \right) + k_{12}x dy + k_{13}x dz \\ &\quad - d \left(k_{21}xy + \frac{1}{2} k_{22}y^2 + k_{23}yz \right) + k_{21}y dx + k_{23}y dz \\ &\quad - d \left(k_{31}xz + k_{32}yz + \frac{1}{2} k_{33}z^2 \right) + k_{31}z dx + k_{32}z dy \end{aligned} \quad (9)$$

$$dV = -d\left(\frac{1}{2}k_{11}x^2 + \frac{1}{2}k_{22}y^2 + \frac{1}{2}k_{33}z^2 + 2k_{12}xy + 2k_{23}yz + 2k_{31}xz\right) + d(k_{12}xy + k_{23}yz + k_{31}zx) \quad (10)$$

よって、

$$dV = -d\left(\frac{1}{2}k_{11}x^2 + \frac{1}{2}k_{22}y^2 + \frac{1}{2}k_{33}z^2 + k_{12}xy + k_{23}yz + k_{31}zx\right) \quad (11)$$

$$V = -\left(\frac{1}{2}k_{11}x^2 + \frac{1}{2}k_{22}y^2 + \frac{1}{2}k_{33}z^2 + k_{12}xy + k_{23}yz + k_{31}zx\right) \square \quad (12)$$

(2) $E = T + V$ であり、運動エネルギー T は、

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (13)$$

(13) 式と、(1) で求めたポテンシャルを用いてエネルギーの時間微分を計算すると、

$$\dot{E} = m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) - (k_{11}x\dot{x} + k_{12}x\dot{y} + k_{12}x\dot{y} + k_{13}x\dot{z} + k_{13}x\dot{z} + k_{22}y\dot{y} + k_{23}y\dot{z} + k_{23}y\dot{z} + k_{33}z\dot{z}) \quad (14)$$

ここで、運動方程式を考えると、 x 方向の運動方程式は

$$m\ddot{x} = F_x = k_{11}x + k_{12}y + k_{13}z \quad (15)$$

となる。 y 、 z 成分も同様に考え、これらを用いて (14) 式の $\ddot{x}$ 、 $\ddot{y}$ 、 $\ddot{z}$ に代入すると

$$\dot{E} = 0 \quad (16)$$

が得られる。(力学的エネルギーの保存) $\square$

問題 3 質点系のポテンシャル

$\mathbf{F} = -\nabla V$ より、

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k(x_1 - x_2) - F \quad (17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(2x_2 - x_1 - x_3) - F \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = k(x_3 - x_2) - F \quad (19)$$

3 式より、

$$dV = d\left(\frac{1}{2}kx_1^2 - kx_1x_2 - Fx_1\right) + kx_1dx_2 \quad (20)$$

$$dV = d\left(kx_2^2 - kx_1x_2 - kx_2x_3 - Fx_2\right) + kx_2dx_1 + kx_2dx_3 \quad (21)$$

$$dV = d\left(\frac{1}{2}kx_3^2 - kx_2x_3 - Fx_3\right) + kx_3dx_2 \quad (22)$$

(20)、(21)、(22) 式より、

$$dV = d\left(\frac{1}{2}kx_1^2 + kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 - kx_1x_2 - kx_2x_3 - Fx_1 - Fx_2 - Fx_3\right) \quad (23)$$

よって、ポテンシャルは

$$V = -F(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{2}k(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2) - k(x_1x_2 + x_2x_3) \quad (24)$$

問題 4 拘束力のある運動 (単振り子)

(1) 図より、

$$F_x = -f \sin \theta \quad (25)$$

$$F_z = -mg + f \cos \theta \quad (26)$$

(2) 図より、 $x - z$ 平面内での運動として考える。 θ を用いて質点の座標を表わすと、

$$x = l \sin \theta \quad (27)$$

$$z = -l \cos \theta \quad (28)$$

(27)、(28) 式の両辺を時間で 2 階全微分すると、

$$\ddot{x} = l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (29)$$

$$\ddot{z} = l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (30)$$

また、Newton の運動方程式を考えると、

$$m\ddot{x} = -f \sin \theta \quad (31)$$

$$m\ddot{z} = -mg + f \cos \theta \quad (32)$$

(29)、(30)、(31)、(32) 式から拘束力 f を消去してまとめると、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (33)$$

を得る。よって、

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (34)$$

(3) (25) ~ (28) 式より、

$$\begin{aligned} N_y &= zF_z - xF_x \\ &= mgl \sin \theta \end{aligned} \quad (35)$$

ここで、運動量を考えると、

$$p_x = m\dot{x} = ml\dot{\theta} \cos \theta \quad (36)$$

$$p_z = m\dot{z} = ml\dot{\theta} \sin \theta \quad (37)$$

(27)、(28)、(36)、(37) 式より、角運動量の y 成分を計算すると、

$$\begin{aligned} L_y &= zp_x - xp_z \\ &= -ml^2\dot{\theta} \end{aligned} \quad (38)$$

よって、角運動量の y 成分の時間微分は、

$$\dot{L}_y = -ml\ddot{\theta} \quad (39)$$

よって、 $\dot{L}_y = N_y$ にそれぞれ代入して整理すると、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (40)$$

問題 5 D'Alembert の原理

(1) (i) 各拘束条件の変位をとると、

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = l \cos \theta \delta \theta \quad (41)$$

$$\delta y = 0 \quad (42)$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial \theta} \delta \theta = l \sin \theta \delta \theta \quad (43)$$

ここで、拘束力は

$$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = (-f \sin \theta, 0, f \cos \theta) \quad (44)$$

となるので、

$$\begin{aligned} f_x \delta x + f_y \delta y + f_z \delta z &= l(-f \sin \theta \cos \theta + f \sin \theta \cos \theta) \delta \theta \\ &= 0 \quad \square \end{aligned} \quad (45)$$

(ii) D'Alembert の原理は

$$(F_x - \dot{p}_x) \delta x + (F_y - \dot{p}_y) \delta y + (F_z - \dot{p}_z) \delta z = 0 \quad (46)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ は重力なので、

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg) \quad (47)$$

(41) ~ (43) 式、(47) 式を (46) 式に代入すると、

$$-\dot{p}_x l \cos \theta \delta \theta + (-mg - \dot{p}_z) l \sin \theta \delta \theta = 0 \quad (48)$$

ここで、

$$\dot{p}_x = m\ddot{x} = -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + ml\ddot{\theta} \cos \theta \quad (49)$$

$$\dot{p}_z = m\ddot{z} = ml\dot{\theta}^2 \cos \theta + ml\ddot{\theta} \sin \theta \quad (50)$$

(49)、(50) 式より、(48) 式は

$$(-ml\ddot{\theta} - mgl \sin \theta) \delta \theta = 0 \quad (51)$$

$\delta\theta$ は任意の無限小変位なので、(51) 式が成り立つには括弧の中が 0 になればよい。よって

$$-ml\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \quad (52)$$

整理すると、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (53)$$

(2)(i) 各拘束条件の変位を取ると、

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta\theta = l \cos \theta \delta\theta \quad (54)$$

$$\delta y = 0 \quad (55)$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial \theta} \delta\theta = l \sin \theta \delta\theta \quad (56)$$

(ii) (1) と同様に運動量を計算する。

$$\dot{p}_x = m\ddot{x} = -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + ml\ddot{\theta} \cos \theta \quad (57)$$

$$\dot{p}_z = m\ddot{z} = -ma\gamma^2 \sin(\gamma t) + ml\ddot{\theta} \sin \theta + ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (58)$$

(46) 式に代入すると、

$$\left(-ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + ma\gamma^2 l \sin(\gamma t) \sin \theta \right) \delta\theta = 0 \quad (59)$$

を得る。先ほどと同様に、括弧の中が 0 になればよいので、

$$-ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + ma\gamma^2 l \sin(\gamma t) \sin \theta = 0 \quad (60)$$

整理すると

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{a\gamma^2}{l} \sin(\gamma t) \sin \theta \quad (61)$$

(3)(i) Lagrange の運動方程式を導く。 $x = x(q, t)$ とおき、 t で全微分すると、

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \quad (62)$$

(62) 式を $\dot{q}$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (63)$$

y, z についても同様である。また、(63) 式を t で全微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \dot{x} \end{aligned} \quad (64)$$

(63)、(64) 式より、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \quad \square \quad (65)$$

これも y, z について同様である。

(ii)

$$\dot{p}_x \delta x = m \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q} \delta q = \left(\frac{d}{dt} \left(m \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q} \right) - m \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \right) \delta q \quad (66)$$

(63)、(65) 式、また $\dot{x} = v_x$ より、(66) 式は

$$\begin{aligned} \dot{p}_x \delta x &= \left(\frac{d}{dt} \left(m v_x \frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}} \right) - m v_x \frac{\partial v_x}{\partial q} \right) \delta q \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) \right) \delta q \end{aligned} \quad (67)$$

$\dot{p}_y \delta y, \dot{p}_z \delta z$ についても同じ計算をすると、

$$\begin{aligned} \dot{p}_x \delta x + \dot{p}_y \delta y + \dot{p}_z \delta z &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) \right) \delta q \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q \quad \square \end{aligned} \quad (68)$$

ただし、 T は運動エネルギーである。また、 F は保存力なので

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad (69)$$

$$F_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (70)$$

$$F_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (71)$$

を満たす。よって、

$$\begin{aligned} F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z &= - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} \right) \delta q \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q} \delta q \quad \square \end{aligned} \quad (72)$$

(iii) (72) 式から (62) 式を引くと、

$$(F_x - \dot{p}_x) \delta x + (F_y - \dot{p}_y) \delta y + (F_z - \dot{p}_z) \delta z = \left(- \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q \quad (73)$$

D'Alembert の原理より、(73) 式の左辺は 0 である。よって右辺も 0 であり、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial}{\partial q} (T - V) = 0 \quad (74)$$

を得る。ここで V は $\dot{q}$ に依存しないので $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ 。よって

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (T - V) \quad (75)$$

とできる。ここでラグランジアン $L = T - V$ を導入すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \square \quad (76)$$

これがラグランジュの運動方程式 (Lagrange eq. of motion) である。

(iv) 質点の座標を θ を用いると、(27)、(28) 式のように書ける。

2 式を時間微分して、

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta \quad (77)$$

$$\dot{z} = l\dot{\theta} \sin \theta \quad (78)$$

よって運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (79)$$

$$V = mgz = -mgl \cos \theta \quad (80)$$

よってラグランジアンは、

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad \square \quad (81)$$

これを Lagrange の運動方程式に代入すると、

$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad (82)$$

よって、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad \square \quad (83)$$

(v) 質点の座標を θ を使うと、

$$x = l \sin \theta \quad (84)$$

$$z = a \sin(\gamma t) - l \cos \theta \quad (85)$$

また、

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta \quad (86)$$

$$\dot{z} = a\gamma \cos(\gamma t) + l\dot{\theta} \sin \theta \quad (87)$$

よって運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \gamma^2 \cos^2(\gamma t) + m a \gamma l \dot{\theta} \cos(\gamma t) \sin \theta \end{aligned} \quad (88)$$

$$V = -mgl \cos \theta + mga \sin(\gamma t) \quad (89)$$

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \gamma^2 \cos^2(\gamma t) + m a \gamma l \dot{\theta} \cos(\gamma t) \sin \theta + mgl \cos \theta - mga \sin(\gamma t) \quad (90)$$

となり、これを Lagrange の運動方程式に代入すると、

$$ml^2\ddot{\theta} - ma\gamma^2l\sin(\gamma t)\sin\theta + mgl\sin\theta = 0 \quad (91)$$

よって、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a\gamma^2}{l}\sin(\gamma t)\sin\theta \quad \square \quad (92)$$