

数理物理学Ⅰ 演習問題 1

問題 1 常微分方程式

(i) 与式は、

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1)$$

変数分離をして

$$dy = 2x dx \quad (2)$$

両辺積分すると、

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ は任意の定数}) \quad \square \quad (3)$$

(ii) 左辺に y 、右辺に x を持ってくるように式変形をすると、

$$\frac{dy}{y} = 2x dx \quad (4)$$

両辺積分すると

$$\ln |y| = x^2 + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

$$|y| = e^{x^2 + C}$$

$$y = \pm e^C e^{x^2} \quad (5)$$

ここで、 $\pm e^C$ の部分を定数 C_1 とおくと、

$$y = C_1 e^{x^2} \quad \square \quad (6)$$

$\ln$ は、底を e とする対数 (自然対数) である。

(iii) (ii) と同様に式変形して、

$$\frac{dy}{y} = -dx \quad (7)$$

(ii) と同じように考えて、

$$y = C e^{-x} \quad (C \text{ は任意の定数}) \quad \square \quad (8)$$

(iv) (iii) の解より、 $y = C(x) e^{-x}$ と仮定し、方程式に代入すると (定数変化法)

$$\frac{dC}{dx} = e^{2x} \quad (9)$$

を得る。これを解くと、

$$C(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + D \quad (D \text{ は任意の定数}) \quad (10)$$

よって、

$$y = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + D \right) e^{-x} \quad \square \quad (11)$$

問題 2 常微分方程式

(i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+xy^2}{2y+x^2y}$ より、

$$\frac{y}{y^2+2}dy = -\frac{x}{x^2+2}dx \quad (12)$$

両辺を積分すると、

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+2) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C_1 \quad (C_1 \text{は任意の定数}) \quad (13)$$

まとめると、

$$\ln(y^2+2)(x^2+2) = 2C_1 \quad (14)$$

なので、

$$(y^2+2)(x^2+2) = (e^{2C_1}) = C \text{ (任意定数)} \quad \square \quad (15)$$

(ii) $y(1)=3$ より、(i) の解である (15) 式に $y=3, x=1$ を代入すると、 $C=33$ となる。よって、

$$(y^2+2)(x^2+2) = 33 \quad \square \quad (16)$$

問題 3 完全系の微分方程式

(i) $(3x+4y)dx + (4x-5y)dy = 0$ において、 $p(x,y) = 3x+4y, q(x,y) = 4x-5y$ とおくと、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (17)$$

となるので、完全形である。

$$\begin{aligned} (3x+4y)dx + (4x-5y)dy &= d\left(\frac{3}{2}x^2 + 4xy\right) - 4xdy + d\left(4xy - \frac{5}{2}y^2\right) - 4ydx \\ &= d\left(\frac{3}{2}x^2 + 8xy - \frac{5}{2}y^2\right) - d(4xy) \\ &= d\left(\frac{3}{2}x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2\right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

となるので、

$$\frac{3}{2}x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2 = C \quad (C \text{は任意の定数}) \quad \square \quad (19)$$

(ii) (i) の場合と同様に、 $p(x,y) = y^2e^x + xe^{-y}, q(x,y) = 2ye^x - \frac{1}{2}x^2e^{-y}$ とおくと、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (20)$$

となるので、完全形である。

$$(y^2e^x + xe^{-y})dx = d\left(y^2e^x + \frac{1}{2}x^2e^{-y}\right) - 2ye^xdy + \frac{1}{2}x^2e^{-y}dy \quad (21)$$

$$\left(2ye^x - \frac{1}{2}x^2e^{-y}\right)dy = d\left(y^2e^x + \frac{1}{2}x^2e^{-y}\right) - y^2e^xdx - xe^{-y}dx \quad (22)$$

となるので、

$$\begin{aligned} d(2y^2e^x + x^2e^{-y}) - 2ye^x dy + \frac{1}{2}x^2e^{-y} dy - y^2e^x dx - xe^{-y} dx &= d(2y^2e^x + x^2e^{-y}) - d\left(y^2e^x + \frac{1}{2}x^2e^{-y}\right) \\ &= d\left(y^2e^x + \frac{1}{2}x^2e^{-y}\right) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となるので、

$$y^2e^x + \frac{1}{2}x^2e^{-y} = C \quad (C \text{ は任意の定数}) \quad \square \quad (24)$$

問題 4 回路と微分方程式

(i) 抵抗での電圧降下は $RI(t)$ 、コンデンサーでの電圧降下は $\frac{Q}{C}$ よって、

$$\frac{Q}{C} = RI(t) \quad (25)$$

また、 $\frac{dQ}{dt} = -I(t)$ であり、(25) 式を微分して代入し、整理すると、

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \square \quad (26)$$

(ii) (i) より、

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC} \quad (27)$$

両辺積分して整理すると、

$$I(t) = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (C_1 \text{ は任意の定数}) \quad \square \quad (28)$$

(iii) $I(0) = I_0$ より、 $C_1 = I_0$ よって、

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \square \quad (29)$$

問題 5 落下と微分方程式

与式を変形して、

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} \left(v - \frac{mg}{b}\right) \quad (30)$$

$V = v - \frac{mg}{b}$ とおくと、

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{b}{m} V \quad (31)$$

(31) 式を解くと $V = Ce^{-\frac{b}{m}t}$ (C は任意定数) となるので、 v について解きなおせば

$$v = Ce^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b} \quad \square \quad (32)$$

また、 $v(0) = 0$ より、 $C = -\frac{mg}{b}$ よって、

$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \quad \square \quad (33)$$

問題 6 半減期

- (i) 個数を $x(t)$ とおくと、崩壊速度は $-\frac{dx}{dt}$ とあらわせる。比例定数を $A(>0)$ とすると、

$$\frac{dx}{dt} = -Ax(t) \quad \square \quad (34)$$

- (ii) (34) 式を解くと、

$$x(t) = Ce^{-At} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \square \quad (35)$$

- (iii) ある時刻 t_1 において、 $x(t_1) = Ce^{-At_1}$ 、個数が半分になったときの時刻を t_2 として、 $x(t_2) = Ce^{-At_2}$

$$\frac{1}{2}Ce^{-At_1} = Ce^{-At_2} \quad (36)$$

- (36) 式より、 $e^{At_2} = 2e^{At_1}$ となり、両辺の対数をとると

$$At_2 = \ln 2 + At_1 \quad (37)$$

よって半減期は、

$$t_2 - t_1 = \frac{\ln 2}{A} \quad \square \quad (38)$$

問題 7 個体数と微分方程式

- (i) $N_A = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$ 、 $N_B = c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}$ を代入してまとめると、

$$2c_1 + c_3 = 0 \quad (39)$$

$$2c_2 - c_4 = 0 \quad (40)$$

の 2 式を得る。よって定数のうち 2 つは消去でき、積分定数 2 つで解を表わすことができるのでこれは一般解である。□

- (ii) 計算すると、

$$4N_A^2 - N_B^2 = 16c_1c_2 \quad (\text{定数}) \quad \square \quad (41)$$

- (iii) (41) 式より、

$$\frac{N_A^2}{4c_1c_2} - \frac{N_B^2}{16c_1c_2} = 1 \quad (42)$$

(42) 式は、双曲線 (または直線) を表わす式である。

- (iv) 実際に場合分けして曲線を描いてみると、

$4N_A^2 > N_B^2$ 、すなわち $N_A > \frac{1}{2}N_B$ のとき、 N_B が絶滅する。

$4N_A^2 < N_B^2$ 、すなわち $N_A < \frac{1}{2}N_B$ のとき、 N_A が絶滅する。

$4N_A^2 = N_B^2$ 、すなわち $N_A = \frac{1}{2}N_B$ のとき、両者が同時に絶滅する。