数理物理学 II 演習問題 1

問題 1　1 の n 乗根

$\omega_k = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。$\omega_k^n = 1$ となるように、r、θ を定める。(r、θ は実数、$r \geq 0$)

$$\begin{aligned} \omega_k^n &= r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n & (1) \\ &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1 & (2) \end{aligned}$$

(1) 式から (2) 式への変形は、ド・モアブルの公式を用いた。(2) 式の実部と虚部より、

$$\begin{aligned} r^n\cos n\theta &= 1 & (3) \\ r^n\sin n\theta &= 0 & (4) \end{aligned}$$

(3)、(4) 式を 2 乗して足すと $r^{2n} = 1$。r は正の実数なので $r = 1$。これを (3)、(4) に代入して、

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= 1 & (5) \\ \sin n\theta &= 0 & (6) \end{aligned}$$

よって、

$$\theta = \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots n) \tag{7}$$

となるので、

$$\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots n)\,\square \tag{8}$$

また、オイラーの公式より、

$$\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} \tag{9}$$

n 乗根のすべての和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\omega_k &= \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\ &= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\ &= 0\,\square & (10) \end{aligned}$$

(※ $e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ である。)

問題 2　オイラーの公式

$A = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\cos k\theta$、$B = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\sin k\theta$

$z = A + iB$ とおき、まず z 全体の和を計算し、実部と虚部に分解する。実部が A、虚部が B になる。

$$\begin{aligned} z = \sum_{k=0}^{\infty} a^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(ae^{i\theta}\right)^k & (11) \end{aligned}$$

$\left|e^{i\theta}\right| \leq 1$、$|a| \leq 1$ より $\left|e^{i\theta}a\right| \leq 1$ となるのでこの無限級数は収束し、

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1-ae^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{(1-a\cos\theta)-ia\sin\theta} \\ &= \frac{1-a\cos\theta+ia\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1} \end{aligned} \tag{12}$$

よって、

$$A = \frac{1-a\cos\theta}{a^2-2a\cos\theta+1} \tag{13}$$

$$B = \frac{a\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}\square \tag{14}$$

問題 3　積分計算

　$n \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx}dx &= \frac{1}{in}\left[e^{inx}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{in}\left[e^{2\pi in}-e^0\right] = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

$n = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx}dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= 2\pi \end{aligned} \tag{16}$$

クロネッカーのデルタを用いてまとめると、

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}dx = 2\pi\delta_{0,n}\square \tag{17}$$

※クロネッカーのデルタ (kronecker's delta)
　$m = n$ のとき $\delta_{m,n} = 1$、$m \neq n$ のとき $\delta_{m,n} = 0$

問題 4　オイラーの公式

　(i)
　オイラーの公式より、$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$、$\sin^2 x = -\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}-2}{4}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x\left(1-\cos^2 x\right)dx \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)dx \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{-\left(e^{2ix}-e^{-2ix}-2\right)}{4}dx - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{-\left(e^{4ix}-e^{-4ix}-2\right)}{4}dx \end{aligned} \tag{18}$$

問題 3 の結果より、e^{2nix} の積分は 0 になるので、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^4 x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} dx \\
&= \frac{3}{4}\pi \square
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(ii)

オイラーの公式より、$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$、$\cos^2 x = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4}$

また、$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ より、$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^6 x dx &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^3 x\right)^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{16}\cos^3 3x - \frac{6}{16}\cos 3x \cos x + \frac{9}{16}\cos^3 x\right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{16}\left(\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}+2}{4}\right) + \frac{6}{16}\left(\frac{e^{4ix}+e^{2ix}+e^{-2ix}+e^{-4ix}}{4}\right) + \frac{9}{16}\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4}\right)\right) dx
\end{aligned}
\tag{20}
$$

同様に、e^{2nix} の積分は 0 になるので、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^6 x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{20}{64} dx \\
&= \frac{5}{8}\pi \square
\end{aligned}
\tag{21}
$$

問題 5　LRC 回路と微分方程式

(a)　コンデンサーの電位差は $\frac{x(t)}{C}$、抵抗の電位差が $RI(t)$、コイルの電位差が $L\frac{dI}{dt}$ となるので、

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \frac{x(t)}{C} \tag{22}$$

$$\text{また、} I(t) = -\frac{dx}{dt} \square \tag{23}$$

(b)　上の二式を合わせて整理すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}x = 0 \tag{24}$$

(1) 式と比較して、$\gamma = \frac{R}{L}$、$\omega^2 = \frac{1}{LC}$、また $\omega > 0$ なので、

$$\gamma = \frac{R}{L} \tag{25}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \square \tag{26}$$

(c)　$e^{\lambda t}$ を代入して整理すると、

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0 \tag{27}$$

$4\omega^2 > \gamma^2$ であることを考慮してこの方程式を解くと、

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \square \tag{28}$$

(d)　$x_1(t)$、$x_2(t)$ が解であるならば、

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \gamma\frac{dx_1}{dt} + \omega^2 x_1 = 0 \tag{29}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \gamma\frac{dx_2}{dt} + \omega^2 x_2 = 0 \tag{30}$$

$c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ を方程式に代入すると、((29)、(30) 式利用)

$$c_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + \gamma\frac{dx_1}{dt} + \omega^2 x_1\right) + c_2\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + \gamma\frac{dx_2}{dt} + \omega^2 x_2\right) = 0 \tag{31}$$

方程式を満たしているので、これも解である。また、λ を代入すれば、

$$x = c_1 e^{\frac{1}{2}\left(-\gamma + i\sqrt{4\omega^2-\gamma^2}\right)t} + c_2 e^{\frac{1}{2}\left(-\gamma - i\sqrt{4\omega^2-\gamma^2}\right)t} \square \quad \text{(一般解)} \tag{32}$$

(e)　$\alpha = \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$ とおくと、

$$x = e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left(c_1 e^{\frac{1}{2}i\alpha t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}i\alpha t}\right) \tag{33}$$

x は実数なので、c_1 と c_2 は複素共役 ($c_1 = \overline{c_2}$)
$c_1 = re^{i\theta}$(極表示) とおくと、$c_2 = re^{-i\theta}$ となるので、式に代入すると、

$$\begin{aligned} x &= re^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left(e^{i\left(\frac{1}{2}\alpha t + \theta\right)} + e^{-i\left(\frac{1}{2}\alpha t + \theta\right)}\right) \\ &= 2re^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t + \theta\right) \end{aligned} \tag{34}$$

となり、$A = 2r$、$\theta = \phi$ とすると、

$$x = Ae^{-\frac{1}{2}\gamma t}\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t + \phi\right) \square \tag{35}$$

(f)

$$x(0) = A\cos\phi = Q > 0 \tag{36}$$

より、

$$\cos\phi = \frac{Q}{A} \tag{37}$$

$$I(0) = -\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = r\left(\alpha\sin\phi + \frac{1}{2}\gamma\cos\phi\right) = 0 \tag{38}$$

(37)、(38) より、

$$\sin\phi = -\frac{Q\gamma}{2A\alpha} \tag{39}$$

(37)、(39) を 2 乗して足して ϕ を消去して A を求めると、

$$A = Q\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\alpha^2}} \quad (A > 0) \tag{40}$$

よって、

$$x = Q\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\alpha^2}} e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t + \phi\right) \square \tag{41}$$

(g)　(37)、(39) より、$\tan\phi = -\frac{\gamma}{2\alpha}$ となるので、

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\gamma}{2\alpha}\right) \tag{42}$$

$\cos\phi > 0$、$\sin\phi < 0$ より、

$$-\frac{\pi}{2} < \phi < 0 \,\square \tag{43}$$

また、

$$x(t) = 0 \longleftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t + \phi\right) = 0 \tag{44}$$

よって $\frac{1}{2}\alpha t + \phi = \frac{\pi}{2}$ となり、(43) とあわせて考えると、

$$\frac{\pi}{\alpha} < t < \frac{2\pi}{\alpha} \square \tag{45}$$