

解析力学Iテスト(2007)― 解答

問1

(1)

m_1, m_2 の運動エネルギーはそれぞれ、

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{r}_1^2 + r_1^2\omega^2), T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\omega^2)$$

であり、弾性力によるポテンシャルエネルギーは、

$$V = \frac{k}{2}(l - (r_1 - r_2))^2$$

となるから、ラグランジアンは、

$$\begin{aligned} L &= T_1 + T_2 - V \\ &= \frac{1}{2}\{m_1(\dot{r}_1^2 + r_1^2\omega^2) + m_2(\dot{r}_2^2 + r_2^2\omega^2)\} - \frac{k}{2}(r_1 - r_2 - l)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

となる。

(2)

$r \equiv r_1 - r_2, m_1 = m_2 = m$ として、 r_1, r_2 のそれぞれについて Lagrange の運動方程式を立てると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_1} = m\ddot{r}_1 - \{mr_1\omega^2 - k(r - l)\} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_2} = m\ddot{r}_2 - \{mr_2\omega^2 + k(r - l)\} = 0 \quad (3)$$

r が一定となる時、 $r_1 = \dot{r}_2, \ddot{r}_1 = \ddot{r}_2$ が成り立つことを用いると、(2),(3) 式より、

$$\begin{aligned} -m(r_1 - r_2)\omega^2 + 2k(r - l) &= 0 \\ \iff r &= \frac{2kl}{2k - m\omega^2} \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる。

*問題文では、 m, k, ω で与えよ、とのことだが、 l を含めたこれ以外に答えはないと思う。

問2

(1)

ラグランジアンは、次のように与えられている。

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{z}^2 + m_2gz \quad (5)$$

$r + z = d$ という条件より、拘束条件

$$dz + dr = 0 \quad (6)$$

が得られる。よって Lagrange の未定乗数 λ を含む運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m_1\ddot{r} - m_1r\dot{\theta}^2 = \lambda \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt}(m_1r^2\dot{\theta}) \\ &= m_1(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = m_2\ddot{z} - m_2g = \lambda \quad (9)$$

となる。

(2)

λ が一般化力であり、 f は原点方向の力であるから、 $\lambda = -f$ である。拘束条件より、

$$\dot{r} = -\dot{z}, \ddot{r} = -\ddot{z}$$

であるから、(7) 式と (9) 式にそれぞれ、 m_2 と m_1 を掛けたものを足すと、

$$(m_1 + m_2)\lambda = -(m_1 + m_2)f \quad (10)$$

$$= -m_1m_2g - m_1m_2r\dot{\theta}^2 \quad (11)$$

$$= -m_1m_2g + \frac{-m_2}{m_1} \frac{(m_1r^2\dot{\theta})^2}{r^3} \quad (12)$$

となる。 $m_1r^2\dot{\theta}$ は平面運動における角運動量 l であるから、 $f = a + bl^2/r^3$ と比較して、

$$a = \frac{m_2g}{m_1 + m_2}, \quad b = \frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)} \quad (13)$$

となる。

問3

ラグランジアンが

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + ax\dot{y} \quad (14)$$

で与えられている。但し、 a は定数。

(1) x と y に対する Lagrange の運動方程式はそれぞれ、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - a\dot{y} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + ax = 0 \quad (16)$$

(2) x, y にそれぞれ共役な一般化運動量 p_x, p_y は次のように与えられる。

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \iff \dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad (17)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + ax \iff \dot{y} = \frac{p_y - ax}{m} \quad (18)$$

ハミルトニアン H は、

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L \\ &= m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + ax\dot{y} - \left\{ \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + ax\dot{y} \right\} \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2m} \{ p_x^2 + (p_y - ax)^2 \} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

(3) 自身が時間 t を陽に含まないことから、ハミルトニアンは保存する。 $t = 0$ での値を用いてハミルトニアンを求めると、

$$H = \frac{m}{2}v_0^2 \quad (20)$$

また、ハミルトニアンが y を陽に含まないことから、 p_y が保存し、その値は

$$p_y = mv_0 \quad (21)$$

これらと、 $x = b$ となった時刻におけるハミルトニアンと p_y でそれぞれ等式を作ると、この瞬間の $\dot{y}$ を未知として、

$$\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{1}{2m} \{(m\dot{y} + ab) - ab\} = \frac{m}{2}\dot{y}^2 \quad (22)$$

$$mv_0 = m\dot{y} + ab \quad (23)$$

上式より、 $\dot{y} = \pm v_0$ であるが、 $a \neq 0, b \neq 0$ より、 $\dot{y} = -v_0$ であり、

$$b = \frac{2mv_0}{a} \quad (24)$$

となる。

問 4

ハミルトニアンが、

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar \sin \theta \quad (25)$$

で与えられている。

(1) Hamilton の運動方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} = \frac{p_r}{m} \iff p_r = m\dot{r} \quad (26)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \iff p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (27)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \dot{p}_r = \frac{p_\theta}{mr^3} - a \sin \theta \quad (28)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \theta} = \dot{p}_\theta = -ar \cos \theta \quad (29)$$

(2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ &= \frac{p_r}{m} \cos \theta - \frac{p_\theta}{mr} \sin \theta \end{aligned} \quad (30)$$

となる。

Poisson 括弧式 $[\dot{x}, H]$ は、

$$[\dot{x}, H] = \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \quad (31)$$

$$= \text{頑張って} \dots \quad (32)$$

$$= 0 \quad (33)$$

よって、

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = [\dot{x}, H] + \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = 0 + 0 \quad (34)$$

となるから、 $\dot{x}$ は保存量である。

(3) F 、 F_2 がこのように与えられるとき、

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial F}{\partial p_x} \dot{p}_x + \frac{\partial F}{\partial p_y} \dot{p}_y - p_x \dot{x} - p_y \dot{y} \\ &= \dot{r}(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta) + r \dot{\theta}(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta) \\ &\quad + \dot{p}_x(r \cos \theta - x) + \dot{p}_y(r \sin \theta - y) - p_x \dot{x} - p_y \dot{y} \\ &= \dot{r}(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta) + r \dot{\theta}(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta) - p_x \dot{x} - p_y \dot{y} \end{aligned} \quad (35)$$

となる。これを正準変換の方程式に代入して整理すると、

$$(p_r - (p_x \cos \theta + p_y \sin \theta))\dot{r} + (p_\theta - (-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta))\dot{\theta} - H = -K \quad (36)$$

となる。 r, θ を独立として、等式が常に成立するためには、

$$p_r = p_x \cos \theta + p_y \sin \theta = \frac{1}{r}(xp_x + yp_y) \quad (37)$$

$$p_\theta = -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta = -yp_x + xp_y \quad (38)$$

$$K = H \quad (39)$$

となる必要がある。

したがって、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を用いると、

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2mr^2}(xp_x + yp_y)^2 + \frac{1}{2mr^2}(-yp_x + xp_y)^2 + ay \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + ay \end{aligned} \quad (40)$$

となる。